CHAPITRE IV

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Table des matières

ECG 2 Maths appliquées, http://louismerlin.fr.

1. Comparaison de fonctions.

Dans la suite, on supposera que les fonctions sont définies sur un intervalle I sauf peut-être en un point x_0 de I. Ce point x_0 pourra désigner également $+\infty$ ou $-\infty$ (auquel cas I prend la forme $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,a]$, avec $a\in\mathbb{R}$).

L'objectif de ce chapitre est de développer un certain nombre de techniques pour étudier une fonction *localement au voisinage de* x_0.

1.1. Fonctions négligeables.

Définition : Fonctions négligeables.

Soit f et g deux fonctions définies sur I, sauf éventuellement en x_0 qui est un point ou une borne de I, avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0.

On dit que la fonction f est **négligeable** devant la fonction g au voisinage de x_0 si, et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

On note $f=\underset{x_0}{\mathbf{o}}(g)$ ou $f=\underset{x\to x_0}{\mathbf{o}}(g)$ et on lit "f est un petit o de g au voisinage de x_0".

Exemple 1.1.1. $x=\underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^2\right)$.

Comme dans le cas des suites, on aurait aussi pu poser comme définition de $f=\underset{x_0}{\mathbf{o}}(g)$:

$$f(x)=\varepsilon(x)g(x),$$

où ε est une fonction définie au voisinage de x_0 et telle que $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$. Cette définition aurait eu le mérite de ne pas avoir à supposer que la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0. Cette situation est rare en pratique alors on se souviendra seulement que les seules fonctions qui sont $\underset{x_0}{\mathbf{o}}(0)$ sont les fonctions qui s'annulent au voisinage de x_0.

Remarque 1.1.2. Remarquer que la notion de fonction négligeable est **locale** : elle renseigne sur le comportement de f et g uniquement au voisinage de x_0. Regardons en effet les fonctions $f(x)=x$ et $g(x)=x^2$. On vient de voir que $f=\underset{+\infty}{\mathbf{o}}(g)$. En revanche c'est l'inverse qui est vrai en 0 : $g=\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(g)$. Ainsi, dire qu'une fonction est négligeable devant une autre n'a aucun sens si on ne précise pas le point autour duquel on effectue la comparaison.

Proposition : Propriétés des négligeables.

Soit f, g et h des fonctions définies sur I, sauf éventuellement en x_0 qui est un point ou une borne de I, avec g et h ne s'annulant pas au voisinage de x_0.

1. **Transitivité :** si $f=\underset{x_0}{\mathbf{o}}(g)$ et $g=\underset{x_0}{\mathbf{o}}(h)$ alors $f=\underset{x_0}{\mathbf{o}}(h)$.
2. **Sommes :** si $f=\underset{x_0}{\mathbf{o}}(h)$ et $g=\underset{x_0}{\mathbf{o}}(h)$ alors $f+g=\underset{x_0}{\mathbf{o}}(h)$.
3. **Passage à l'inverse :** si $f=\underset{x_0}{\mathbf{o}}(g)$ alors $\dfrac{1}{g}=\underset{x_0}{\mathbf{o}}\left(\dfrac{1}{f}\right)$ (avec f ne s'annulant pas au voisinage de x_0).

Démonstration. À compléter

□

Proposition : Négligeables et limites.

Soit f et g deux fonctions définies sur I, sauf éventuellement en x_0 qui est un point ou une borne de I, avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0.

1. $f=\underset{x_0}{\mathbf{o}}(1)$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to x_0}f(x)=0$.

2. Si $f = \underset{x_0}{\mathbf{o}}(g)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Démonstration. À compléter

□

Exemple 1.1.3.

- $3x + x^2 = \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^3\right)$ car $3x = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^3\right)$ et $x^2 = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^3\right)$.
- $\dfrac{1}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x}\right)$ car $x = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^2\right)$.
- $x^2 = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)$.

Remarque 1.1.4. On ne peut pas ajouter ou composer les $\mathbf{o}$:

Si $f = \underset{x_0}{\mathbf{o}}(g)$ et $h = \underset{x_0}{\mathbf{o}}(k)$ alors on n'a pas forcément $f + h = \underset{x_0}{\mathbf{o}}(g+k)$. Par exemple avec $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x$, $k(x) = -x^2$ et $x_0 = +\infty$.

De même, $x = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^2\right)$ mais $\ln(x) \neq \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(\ln(x^2)\right)$ car $\dfrac{\ln(x)}{\ln(x^2)} = \dfrac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 quand $x \to +\infty$.

1.2. **Fonctions équivalentes.**

Définition : Fonctions équivalentes.

Soit f et g deux fonctions définies sur I, sauf éventuellement en x_0 qui est un point ou une borne de I, avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0.

On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de x_0 si, et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note $f \underset{x\to x_0}{\sim} g$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$ et on lit "f est équivalente à g au voisinage de x_0".

Comme d'habitude, on peut aussi envisager de donner une définition qui se passe de l'hypothèse où g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0 mais elle est peu utilisée.

Exemple 1.2.1. $x^2 + 3x \underset{+\infty}{\sim} x^2$.

Remarque 1.2.2. La même remarque que pour la notion de négligeabilité s'applique aussi pour les fonctions équivalentes (remarque 1.1.2) : c'est une notion locale qui n'a de sens qu'au voisinage d'un point donné.

Proposition : Opérations sur les équivalents.

Soit f, g, h et k des fonctions définies sur I, sauf éventuellement en x_0 qui est un point ou une borne de I, avec g et k ne s'annulant pas au voisinage de x_0.

1. **Produit :** si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$ alors $fh \underset{x_0}{\sim} gk$.
2. **Quotient :** si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$ (avec h et k ne s'annulant pas au voisinage de x_0) alors $\dfrac{f}{h} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g}{k}$.
3. **Élévation à une puissance réelle :** si f et g sont strictement positives au voisinage de x_0 et $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. **Valeur absolue :** si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $|f| \underset{x_0}{\sim} |g|$.

Démonstration. À compléter

□

Proposition : Propriétés des équivalents.

Soit f, g et h des fonctions définies sur I, sauf éventuellement en x_0 qui est un point ou une borne de I, avec g et h ne s'annulant pas au voisinage de x_0.

1. **Transitivité :** si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$.
2. **Composition à droite :** si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{t \to t_0} u(t) = x_0$ alors $f \circ u \underset{t_0}{\sim} g \circ u$.
3. **Équivalents et négligeables :** si $f = \underset{x_0}{\mathbf{o}}(g)$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, alors $f + g \underset{x_0}{\sim} h$.
   Autrement dit : dans une somme de fonctions, on peut négliger les termes négligeables !

Démonstration. À compléter

□

Proposition : Équivalents et limites.

Soit f et g deux fonctions définies sur I, sauf éventuellement en x_0 qui est un point ou une borne de I, avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0.

1. $f \underset{x_0}{\sim} 1$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$.
2. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ (réel ou $\pm\infty$) alors f possède une limite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Démonstration. À compléter

□

Remarque 1.2.3. On peut multiplier et diviser les équivalents mais :

On n'additionne jamais les équivalents : $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$, $-x + 3 \underset{+\infty}{\sim} -x$ mais $(x+1) + (-x+3)$ n'est pas équivalent à $x + (-x) = 0$!

On ne compose jamais à gauche : $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ mais e^{x^2+x} et e^{x^2} ne sont pas équivalents.

Les seules fonctions équivalentes à 0 sont les fonctions constantes nulles dans un voisinage de x_0.

1.3. Exemples de références et croissances comparées réécrites.

Proposition : Équivalents de polynômes ou de fractions rationnelles en $\pm\infty$.

- Un polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré.
- Une fraction rationnelle est équivalente en $\pm\infty$ au quotient des monômes de plus haut degré.

Démonstration. À compléter

□

Exercice 1.3.1. Déterminer un équivalent des fonctions suivantes en $\pm\infty$ et en 0 : $f(x) = 4x^5 - 5x^4$, $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x^5 + 1}{6x^3 + x - 5}$

Proposition : Croissances comparées.

- $\boxed{\ln(x) = \underset{x \to +\infty}{\mathbf{o}}(x)}$ et, plus généralement : $\forall a > 0$, $b > 0$, $(\ln(x))^a = \underset{x \to +\infty}{\mathbf{o}}\left(x^b\right)$.
- $\boxed{x = \underset{x \to +\infty}{\mathbf{o}}(e^x)}$ et, plus généralement : $\forall a > 0$, $b > 0$, $x^a = \underset{x \to +\infty}{\mathbf{o}}\left(e^{bx}\right)$.
- $\boxed{\ln(x) = \underset{x \to 0}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x}\right)}$ et, plus généralement : $\forall a > 0$, $b > 0$, $(\ln(x))^a = \underset{x \to 0}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^b}\right)$.

Démonstration. Il s'agit d'une réécriture des limites connues. □

Proposition : Équivalents usuels.

On a :

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x} \qquad \boxed{e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x} \qquad \boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x} \text{ si } \alpha > 0$$

En particulier, pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$

Démonstration. À compléter

□

Exemple 1.3.2. $x^3 = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)$, $x^3 + 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x$, $x = \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^3\right)$, $x^3 + 2x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$

Méthode : Obtention d'équivalents.

- **Factorisation par le terme prépondérant :** le monôme dominant pour les polynômes et fractions rationnelles en $\pm\infty$, et plus généralement, en utilisant les croissances comparées.
- **Exploitation de la dérivation :** si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors :
$$f(x) - f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0).$$
- **Utilisation d'encadrements :** on encadre un quotient de deux fonctions par deux fonctions de même limite 1.
- **Calcul d'une limite finie :** si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\ell \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell$.

Exercice 1.3.3. Donner un équivalent de :

1. $f(x) = 2e^x + 3\sqrt{x} - x^{100}$ aux voisinages de 0 et $+\infty$;

2. $g(x) = 5\ln(x) + 3e^{-x} - x^{100}$ aux voisinages de 0 et $+\infty$.

Exercice 1.3.4. Donner des équivalents simples au point proposé :

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$ en $+\infty$, $-\infty$, 0

2. $g(x) = \ln(1-x)$ aux voisinages de 0 et $-\infty$.

3. $h(x) = \ln(x)$ au voisinage de 1.

Exercice 1.3.5. **1.** Donner un équivalent puis calculer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$

a. $\dfrac{x-1}{x^3+x^2+x+1}$

b. $\dfrac{3x^2+4-e^{\frac{x}{2}}}{\ln(x)}$

c. $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(\sqrt{x})}$

d. $x^2\ln(x) - x^3 + 1$

e. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

f. $\dfrac{\ln(2x+1)}{x+1}$

2. Donner un équivalent puis calculer la limite des fonctions suivantes en $-\infty$:

a. $x^{23} - x^{17}$

b. $\dfrac{x-1}{x^3+x^2+x+1}$

c. $x + \sqrt{x^2+x+1}$

d. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$

e. $(1+x^2)e^x$

f. $\sqrt{\dfrac{x^2}{2x^2+x+1}}$

3. Donner un équivalent puis calculer les limites des fonctions suivantes en 0 (en 0^+ et 0^- si nécessaire)

a. $x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

b. $x + \ln(x) + \frac{1}{x}$

c. $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$

d. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

e. $\frac{1-e^{-x}}{x}$

f. $\frac{4x-2}{x^2-4x}$

2. Développements limités (d'ordre au plus 2).

Exemple 2.0.1 (Insuffisance de la notion d'équivalent.). Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

L'étude de la dérivabilité de la fonction précédente révèle que la notion d'équivalent est parfois trop faible, qu'elle ne donne pas suffisamment d'informations (pour pouvoir par exemple lever certaines indéterminations lorsqu'on calcule une limite). On peut alors affiner notre étude locale des fonctions, et faire ce qu'on appelle un développement limité. L'idée est d'approcher une fonction à étudier par une fonction plus simple, de manière à ce que l'erreur que l'on fait dans la substitution est petite au voisinage d'un point donné. Un développement limité à l'ordre 1 consiste à remplacer la fonction à étudier par une fonction affine, tandis qu'à l'ordre 2, on approche par une fonction quadratique.

Remarque 2.0.2. Dans les deux paragraphes suivants, le point x_0 est un réel, qui ne peut donc pas être $\pm\infty$. Nous verrons ensuite comment obtenir des développements limités au voisinage de $\pm\infty$.

2.1. Développements limités d'ordre 1 (ECG1).

Définition : Développement limité d'ordre 1.

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0.

On dit que f admet un **développement limité d'ordre 1** en x_0, s'il existe deux réels a et b et une fonction ε définie au voisinage de x_0, tels que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x),$$

$$\text{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Théorème : Lien entre développement limité d'ordre 1 et dérivabilité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et continue en x_0 élément de I.

f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 si, et seulement si f est dérivable en x_0, et on a alors :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Démonstration. À compléter

□

Remarque 2.1.1. En utilisant $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ on dit qu'on effectue une "approximation affine de f au voisinage de x_0". En effet, la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est la tangente à la courbe de f au point x_0.

Proposition : Développements limités d'ordre 1 en $x_0 = 0$ des fonctions de référence.

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon_1(x), \qquad \ln(1+x) = x + x\varepsilon_2(x), \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + x\varepsilon_3(x)$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = \lim_{x \to 0} \varepsilon_3(x) = 0$.

2.2. Développements limités d'ordre 2.

Définition : Développement limité au voisinage de 0.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0. On dit que f admet un **développement limité (DL) d'ordre 2 au voisinage de** 0 s'il existe des réels a, b et c et une fonction ε définie sur I tels que, pour tout x proche de 0 :

$$f(x) = a + bx + cx^2 + x^2\varepsilon(x)$$

$$\text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemple 2.2.1. **1.** Montrer que pour tout réel $x \neq -1$, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{1+x}$.

2. En déduire un développement limité d'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0.

Définition : Développement limité au voisinage de x_0.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0. On dit que f admet un **développement limité (DL) d'ordre 2 au voisinage de** x_0 s'il existe des réels a, b et c et une fonction ε définie sur I tels que, pour tout x au voisinage de x_0 :

$$f(x) = \underbrace{a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2}_{\text{polynôme de degré au plus 2}} + \underbrace{(x-x_0)^2\varepsilon(x)}_{\text{reste négligeable devant } (x-x_0)^2}$$

$$\text{avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarque 2.2.2. La fonction f possède un développement limité au voisinage de x_0 si et seulement si la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ possède un développement limité au voisinage de 0. En effet :

$$f(x) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\varepsilon_1(x)$$

si et seulement si

$$f(x_0+h) = a + bh + ch^2 + h^2\varepsilon_2(h)$$

en posant $h = x - x_0$ i.e. $x = x_0 + h$, avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon_1(x) = 0 = \lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h)$ en notant $\varepsilon_2(h) = \varepsilon_1(x_0+h)$.

Méthode : Développement limité en $x_0 \neq 0$.

Dans la pratique, on se ramène toujours à un développement limité au voisinage de 0 en posant $x = x_0 + h$.

Exemple 2.2.3. Déduire de l'exemple précédent un développement limité de la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1.

Théorème : Existence d'un développement limité : théorème de Taylor-Young.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de x_0. Alors f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de x_0, et l'on a :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\varepsilon(x)$$

$$\text{avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Si $x_0 = 0$, cela donne :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

$$\text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration. Admis. □

Théorème : Unicité du développement limité.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui admet donc un développement limité d'ordre 2 au voisinage de x_0. Ce développement limité est unique. Plus précisément, si f s'écrit, au voisinage de x_0,

$$f(x) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

Alors on a :

- $a = f(x_0)$;
- $b = f'(x_0)$, et la tangente à la courbe de f au voisinage de x_0 admet pour équation $y = a + b(x-x_0)$;
- $c = \dfrac{1}{2}f''(x_0)$: si $c > 0$, alors la courbe est localement au-dessus de sa tangente, et si $c < 0$, la courbe est localement en-dessous de sa tangente.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 2.2.4. Attention ! Ce n'est pas parce qu'une fonction admet un développement limité à l'ordre 2 qu'elle est nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$, ni même dérivable deux fois. Il ne faut donc pas utiliser (à tort) une version de la réciproque du théorème de Taylor-Young et l'énoncé précédent ne marche que si la fonction est supposée de classe $\mathcal{C}^2$.

Proposition : Exemples de référence.

Développements limités d'ordre 2 en $x_0 = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \tag{1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x) \tag{2}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^2\varepsilon_3(x) \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R} \tag{3}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 2.2.5. On déduit de la proposition précédente, en remplaçant x par $-x$ (composition à droite), d'autre formules de développement limité pour des fonctions associées aux fonctions de référence :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x) \tag{4}$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x) \tag{5}$$

$$(1-x)^\alpha = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^2\varepsilon_6(x) \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R} \tag{6}$$

En particulier, pour $\alpha = -1$ ou $\dfrac{-1}{2}$:

$$\begin{array}{llll}
(7) & \dfrac{1}{1+x} & = & 1-x+x^2+x^2\varepsilon_7(x) \\
(8) & \dfrac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2+x^2\varepsilon_8(x) \\
(9) & \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} & = & 1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+x^2\varepsilon_9(x) \\
(10) & \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} & = & 1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+x^2\varepsilon_{10}(x)
\end{array}$$

Exemple 2.2.6. Retrouver le développement limité de ln au voisinage de e à l'aide du développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0.

Méthode : Obtention du développement limité.

- Si l'on parvient à écrire une égalité $f(x) = P(x) + g(x)$ avec P un polynôme (de degré au plus 2) et $\lim_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{(x-x_0)^2} = 0$, alors on a le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de x_0.
- On utilise une formule de développement limité d'une des trois fonctions de référence.
- Si la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$, on calcule $f(x_0)$, $f'(x_0)$ puis $f''(x_0)$ et on applique la formule de Taylor-Young.

Exemple 2.2.7. Soit $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + (x-3)^3 \ln(x)$, pour $x > 0$. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 3.

Exemple 2.2.8. Soit $f(x) = \ln(x)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ puis donner son développement limité d'ordre 2 au voisinage de e à l'aide de la formule de Taylor-Young.

Exercice 2.2.9. Calculer les développements limités à l'ordre 2 suivants, puis préciser la limite de la fonction au point considéré, et un équivalent simple au voisinage du point :

1. $f(x) = e^x \ln(1-2x)$ en 0.

2. $f(x) = \dfrac{1}{5-3x}$ en 0.

3. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ en 0.

4. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ en 1.

Exercice 2.2.10. Calculer les limites suivantes, préciser un équivalent de la fonction au point considéré :

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-2x) + e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$

Exercice type concours.

Soit f définie par : $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ si $x > 0$.

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

3. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$. En déduire un équivalent de $f'(x)$ au voisinage de 0.

4. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.

2.3. **Développements limités au voisinage de $\pm\infty$.** On définit dans ce paragraphe le développement limité d'une fonction au point $x_0 = +\infty$. Le cas du point $x_0 = -\infty$ est similaire.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$. Dans ce cas, on dit que f est définie au voisinage de $+\infty$.

Définition : Développement limité de f en $+\infty$.

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On considère la fonction u définie de la manière suivante

$$u \colon x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Écrivons le développement limité de u en 0 :

$$u(x) = a + bx + cx^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x^2\right).$$

Alors on vérifie immédiatement qu'au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x^2\right).$$

C'est le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.

Les deux paragraphes précédents s'appliquent donc pour des développements limités en $+\infty$ puisqu'il s'agit de se ramener à un développement limité en 0.

2.4. **Asymptotes obliques à l'infini.**

Définition : Asymptote oblique.

On dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe de f si, et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Remarque 2.4.1. En abusant légèrement des définitions, nous dirons que f admet comme développement limité au voisinage de $+\infty$ l'expression suivante

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \underset{x\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette écriture n'est pas à proprement parler un développement limité puisque ax diverge vers + ou − l'infini lorsque x tend vers $+\infty$. À la section suivante, nous expliquerons quelle est la nature de cette expression. Ici, nous nous contenterons de faire comme s'il s'agissait d'un vrai développement limité.

Si, au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x) = ax+b+\frac{c}{x}+\frac{\varepsilon(x)}{x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

- Si $c < 0$, la courbe est localement en-dessous de son asymptote,
- Si $c > 0$, la courbe est localement au-dessus son asymptote,

L'étude est similaire en $-\infty$, mais les positions relatives sont inversées (à cause du signe de $\frac{1}{x}$).

Exercice 2.4.2. Soit $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de $+\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote oblique pour la courbe de f. Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Exercice type concours.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie par $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ pour tout $x > 0$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
2. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $f_n(x) = x - n + \dfrac{n^2}{2x} + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. En déduire un équivalent de $f_n(x)$, puis la limite de $f_n(x)$ et celle de $f_n(x) - x$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Remarques et Compléments (HORS PROGRAMME).

3.1. Développements limités d'ordres supérieurs.

Bien souvent dans la pratique, un développement limité à l'ordre 2 est une information très précieuse, qui donne suffisamment d'informations locales pour une étude fine de la fonction. Dans certains cas cependant, on peut avoir besoin d'une information encore plus précise.

Exemple 3.1.1. Chercher la limite en 0 de la fonction $f(x) = \frac{e^x - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^3}$.

Dans l'exemple précédent, le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction exponentielle ne permet pas de calculer la limite : il faudrait encore pouvoir comparer le reste du développement limité à la fonction x^3 en 0. C'est ce qu'on appelle faire un développement limité à l'ordre 3. En fait, on peut envisager de faire des développements limités à tous les ordres, pourvu que la fonction le permette.

Définition : Développement limité à l'ordre k.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 et soit k un entier positif. On dit que f admet un développement limité à l'ordre k en x_0 s'il existe des réels $a_0, a_1, \cdots, a_k$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^k\varepsilon(x)$$

$$\text{avec} \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Comme dans tout ce qui précède, l'idée consiste encore à approcher la fonction f par une fonction plus simple (cette fois-ci une fonction polynôme d'ordre k, et non plus un polynôme de degré 1 ou 2) et de contrôler l'erreur au voisinage de x_0.

Comme à l'ordre 1 ou 2, il est facile d'obtenir un développement limité d'une fonction suffisamment dérivable à l'aide de ses dérivées au point x_0.

Théorème : Formule de Taylor-Young généralisée (hors programme).

Soit k un entier positif et soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de x_0. Alors

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + (x - x_0)^k\varepsilon(x)$$

$$\text{avec} \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

3.2. Échelles de comparaisons.

Que faut-il penser d'une expression de la forme

$$f(x) = \sqrt{x} + x + \underset{x \to 0}{\mathbf{o}}(x)?$$

Ce n'est pas un développement limité car $x \mapsto \sqrt{x}$ ne fait pas partie des fonctions que l'on peut utiliser pour approcher f. D'autre part, de cette relation, on déduit que

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{x},$$

mais elle est aussi plus précise qu'un simple équivalent puisqu'elle donne une information sur le reste $f(x) - \sqrt{x}$.

On constate alors qu'un développement limité dépend d'une *base de données* (souvent appelée échelle de comparaison) de fonctions de référence et qu'on utilise ces fonctions (et ces fonctions seulement) pour approcher la fonction à étudier.

Dans le programme de ECG2, nous avons choisi comme base de données les fonctions polynômes d'ordre 2 puisque c'est ce type de fonctions qui sont données par le théorème de Taylor-Young. Mais c'est un choix arbitraire et d'autres options sont possibles, comme par exemple intégrer $x \mapsto \sqrt{x}$ dans notre échelle de comparaison.

3.3. **Développements asymptotiques.**

Dans l'idée du paragraphe précédent, on peut même intégrer dans nos échelles de comparaison des fonctions qui ne sont pas définies en x_0, par exemple qui tendent vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers x_0. Dans ce cas, on produirait des expressions de la forme

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 + x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\,.$$

Ce type d'expression nous est apparue naturellement pour $x_0 = +\infty$ car dans ce cas,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \underset{x\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'est pas un développement limité. On appelle une telle approximation un développement asymptotique f en 0. Un développement asymptotique est capable de renseigner à la fois sur le comportement local de la fonction en x_0, comme dans le cas d'un développement limité, mais aussi sur sa vitesse de divergence à l'infini comme c'est le cas dans l'exemple précédent.

4. Sujets d'annales en lien avec ce chapitre.

Très peu de sujets d'annales sont en lien direct avec ce chapitre. En fait, on trouve souvent aux concours des exercices d'analyse de fonctions, mais il s'agit plutôt de manipuler des concepts de première année : fonctions continues, de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, etc.

Les développements limités de fonctions sont utilisés fréquemment pour calculer des limites en un point fini ou infini, ce qui est très souvent le cas dans ces exercices. Par exemple, lorsque la dérivée en un point litigieux est à chercher (un point au bord de l'ensemble de définition ou pour lequel la fonction est définie de manière différente), il faut calculer la limite du taux d'accroissement, et bien souvent on s'aide d'un développement limité pour calculer cette limite.

Faire un développement limité est rarement un objectif en tant que tel, mais plutôt un outil.